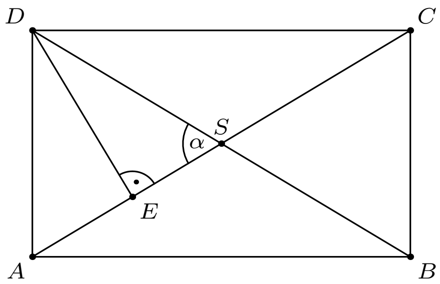
Próbna matura rozszerzona (jesień 2014 r.)

Zadanie 7 — kilka innych rozwiązań

Wojciech Guzicki

Zadanie 7. Długości boków prostokąta są równe 3 oraz 5. Oblicz sinus kąta ostrego, który tworzą przekątne tego prostokąta.

Rozwiązanie. Sposób I. Mamy dany prostokąt $ABCD$, w którym $AB = CD = 5$ oraz $AD = BC = 3$. Niech $\alpha = \measuredangle ASD$. Poprowadźmy teraz z punktu D wysokość DE trójkąta ACD.



Wówczas:

$$\sin\alpha = \frac{DE}{DS}.$$

Oczywiście

$$DS = \frac{1}{2}\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5^2+3^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{34} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Teraz obliczamy dwoma sposobami pole trójkąta ACD:

$$P_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot DE \quad \text{oraz} \quad P_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot CD\cdot AD = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3 = \frac{15}{2}.$$

Stąd dostajemy

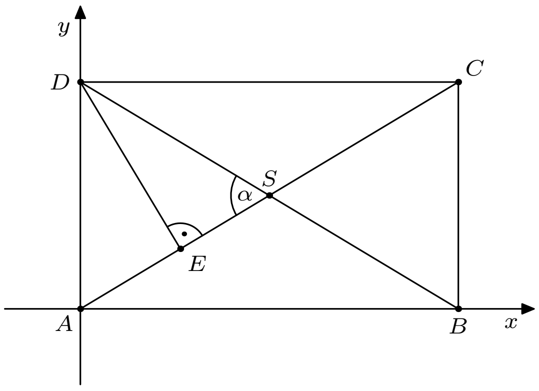
$$DE = \frac{15}{\sqrt{34}} = \frac{15\sqrt{34}}{34},$$

czyli

$$\sin\alpha = \frac{15\sqrt{34}}{34}\cdot\frac{2}{\sqrt{34}} = \frac{15}{17}.$$

Rozwiązanie. Sposób II. Umieśćmy dany prostokąt $ABCD$ w układzie współrzędnych i poprowadźmy z punktu D wysokość trójkąta ACD. Niech

$$A = (0,0), \quad B = (5,0), \quad C = (5,3), \quad D = (0,3) \quad \text{oraz} \quad \alpha = \measuredangle ASD.$$



Wówczas

$$\sin\alpha = \frac{DE}{DS}.$$

Oczywiście

$$DS = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5^2+3^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Nietrudno zauważyć, że prosta AC ma równanie $3x - 5y = 0$. Teraz obliczamy długość odcinka DE jako odległość punktu D od prostej AC:

$$DE = \frac{|3\cdot 0 - 5\cdot 3|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{15}{\sqrt{34}} = \frac{15\sqrt{34}}{34}.$$

Zatem

$$\sin\alpha = \frac{15\sqrt{34}}{34}\cdot\frac{2}{\sqrt{34}} = \frac{15}{17}.$$